2018 年福建专升本考试考前最后 2 天练手卷

高等数学　参考答案

一、选择题

1. C

【精析】要使函数有意义，须令 $1-x^2>0$ 且 $\left|\frac{x}{2}-1\right|\leq 1$，求解得 $0\leq x<1$，故选 C

2. A

【精析】令 $\psi(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$，

$$\psi(-x)=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=-\psi(x)$$

3. A

【精析】$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}=2\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+3\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}$$

$$=2f'(1)+3f'(1)=5f'(1)$$

4. B

【精析】因为 $y'=1+e^x, y'\big|_{x=0}=1+e^0=2$

所以切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $y=2x=1$，应选 B

5. C

【精析】选项 A 和 B 在 x=0 处不可导，而 D 选项在 x=-1 处无定义，只有 C 选项符合题意，故选 C.

6. A

【精析】在区间（1，$+\infty$）内有 $f'(x)=(x-1)(x+1)>0$，$f''(x)=2x>0$，故应选 A.

7. C

【精析】$\int f(e^x)e^x dx=\int f(e^x)d(e^x)=F(e^x)+C$。故应选 C

8. C

【精析】根据奇偶函数在对称区间上的积分性质，可以判定 C 是正确的，故应选 C.

9. A

【精析】因为特征方程 $r^x-2r+1=0$ 有二重特征根 $r_1=r_2=1$，又自由项 $f(x)=(x+1)e^x$ 中 $\lambda=1$ 为特征重根，故方程的特解应设为 $y'=x^2(ax+b)e^x$，故应选 A.

10. B

【精析】由 $a\times b=a\times c$ 得 $a\times(b-c)=0$

所以 a//（b - c）. 故应选 B

二、填空题

11. 跳跃

【精析】因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1$，$\operatorname{lin}\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1$.

12. （1, -1）

【精析】$y'=3x^2-6x+2$, $y''=6x-6$,令 $y''=0$ 得 $x=1$，所以（1,-1）为曲线的拐点

13. 1

【精析】$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}ae^x=a=f(0),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\cos\dfrac{1}{x}+1\right)=1$,由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $a=f(0)=1$，即 $a=1$.

14. 5

【精析】 $f'(x)=4x^3-4x$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=0,-1,1$，计算 $f(0)=5$， $f(\pm1)=4,f(\pm\sqrt{2})=5$，

从而 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 上的最大值为 5.

15. $1-\dfrac{1}{2}\sin2$

【精析】 $f_{-1}^{1}(x^3-x+1)\sin^2xdx=f_{-1}^{1}\sin^2xdx$

$$=2f_0^1\sin^2xdx=f_0^1(1-\cos2x)dx$$

$$=(x-\frac{1}{2}\sin2x)|_0^1=1-\frac{1}{2}\sin2$$

16. $\dfrac{e^2+1}{4}$

【精析】 $f_1^e x\ln xdx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x|_1^e-\dfrac{1}{2}f_1^e x^2\bullet\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{e^x}{2}-\dfrac{x^2}{4}|_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$.

三、计算题

17. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx \xlongequal{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t} \int (t^2-1)t\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$

$$=\int \frac{2t^2}{1-t^2}dt=-2\int(1+\frac{2t}{(t^2-1)})dt$$

$$=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2t+2\ln(t+1)-\ln\left|t^2-1\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1)+\ln|x|+C$$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})] \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \lim\limits_{t\to0^+}[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}]$

19.因为$\left|\arctan\frac{1}{x}\right|<\frac{\pi}{2}(x\neq0)$有界，则

$\lim\limits_{x\to0}\int(x)=\lim\limits_{x\to0}x\arctan\frac{1}{x}=0=\int(0)$,

所以$\int(x)$在$x=0$处是连续的.

又$f'-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\int(x)-\int(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x}$

$$=\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}.$$

$f'+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int(x)-\int(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $f(x)$在$x=0$处不可导.

20. 因为 $y=\ln\sqrt{\frac{(1-x)e^x}{\arccos x}}=\frac{1}{2}[\ln(1-x)+x-\ln(\arccos x)]$

所以 $y'=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x}+1-\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-1}+\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right)$$

故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}\left(0+\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}$

21. 方程为一阶非齐次线性微分方程，$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\ln x}{x}$

所求的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\ln x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\ln xdx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}(x\ln x-x+C)$$

$$=\ln x-1+\frac{C}{x}(C\text{为任意常数})$$

22. 因为 $s_1=\{1,0,-1\},n=\{4,3,0\}$

由题设知 $s=s_1\times n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\{3,-4,3\}$

又因直线过点 $\{2,-1,3\}$，所以所求直线方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{3}$$

四、应用题

23. 由已知，增加了 3 只船，减少 6 次，设每次拖 x 只船，则增加 $x-4$ 只船，设减少 y 次，则

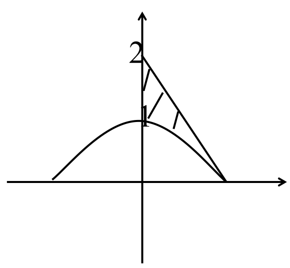
$3:6=(x-4):y,y=2(x-4)$，设运货总量为 M

则 $M=x[16-2(x-4)]=24x-2x^2,x>0$

又 $M''=-4<0$,所以 $x=6$ 为极大值点，
故一次拖 6 只船，每日来回 12 次能使货运总量达到最大。

24. 平面图形如图所示，因 $y'=-2x$，所以 $k=-2$，

从而经过点 $(1,0)$ 的切线方程为 $y=-2x+2$



（1）所求平面图形的面积为

$$S=\int_0^1\left[(-2x+2)-\left(1-x^2\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

（2）该图形绕 y 轴一周所成旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1 x\left[(-2x+2)-\left(1-x^2\right)\right]dx$$

$$=2\pi\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

五、证明题

25.令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也连续

且 $F(a)=f(a)-g(a),F(b)=f(b)-g(b)$

由于 $f(a)\neq f(b)$，所以 $f(a)<f(b)$ 或者 $f(a)>f(b)$

当 $f(a)<f(b)$ 时，注意到 $f(a)=g(b),f(b)=g(a)$，可知

$F(a)=f(a)-g(a)=f(a)-f(b)<0,F(b)=f(b)-g(b)=f(b)-f(a)$

于是由零点定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=g(\xi)$

类似的可证 $f(a)>f(b)$ 时结论也成立。